

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки**  
**Кафедра алгебри і математичного аналізу**



**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Проректор з науково-педагогічної і  
навчальної роботи та рекрутації,  
проф. Гаврилюк С. В.

Протокол № 2 від 14.10. 2018 р.

**ПРОГРАМА**  
**вибіркової навчальної дисципліни**

**ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ СТРУКТУР**

підготовки \_\_\_\_\_ магістра \_\_\_\_\_

галузь знань \_\_\_\_\_ 11 – Математика та статистика \_\_\_\_\_

спеціальність \_\_\_\_\_ 111 – Математика \_\_\_\_\_

освітня програма \_\_\_\_\_ Математика \_\_\_\_\_

Луцьк – 2018

**Програма навчальної дисципліни «Зображення алгебраїчних структур»**  
підготовки магістра, галузі знань 11 – Математика та статистика, спеціальності  
111 – Математика, за освітньої програмою Математика.

**Розробник:** доцент, канд. фіз.-мат. наук Волошина Т.В.

**Рецензент:** доцент, канд. тех. наук Дутчак Б.І.

**Програма навчальної дисципліни затверджена на засіданні кафедри**  
алгебри і математичного аналізу  
протокол № 2 від 05. 09. 2018 р.

Завідувач кафедри:



(Кальчук І. В.)

**Програма навчальної дисципліни**  
**схвалена науково-методичною комісією**  
факультету інформаційних систем, фізики та математики  
протокол № 1 від 06. 09. 2018 р.

Голова науково-методичної

комісії факультету:



(Полетило С. А.)

**Програма навчальної дисципліни**  
**схвалена науково-методичною радою**  
**Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки**



**Основним завданням** вивчення даної дисципліни є формування у студентів базових понять теорії зображень, лінійної алгебри, теорії груп, розвиток абстрактного мислення та просторового уявлення, озброєння алгебраїчним апаратом, необхідним для подальшого успішного їх прикладного застосування.

**Міждисциплінарні зв'язки:** з лінійною алгеброю, теорією груп, фізикою, хімією. Алгебраїчними структурами насичені майже всі розділи математики. Методи лінійної алгебри та теорії зображень широко використовуються як у теоретичній та прикладній математиці, так і за її межами, зокрема, у фізиці та механіці, при моделюванні явищ та процесів навколишнього світу.

### **3. КОМПЕТЕНЦІЇ**

**До кінця навчання студенти будуть компетентними у таких питаннях:**

- Регулярне зображення групи правими зсувами. Теорема Келі.
- Дія групи на множині. Орбіти та стабілізатори, їх властивості. Лема Бернсайда.
- Поняття підстановочного зображення групи.
- Зображення групи підстановками правих класів суміжності за підгрупою.
- Ядро підстановочного зображення.
- Критерій точності зображення групи підстановками правих класів суміжності за підгрупою.
- Подібні підстановочні зображення. Критерій подібності.
- Транзитивні підстановочні зображення груп.
- Лінійні зображення груп, основні поняття: простір зображення, степінь зображення, точність, подібність зображень.
- Приклади лінійних зображень. Регулярне зображення.
- Поняття підзображення, приклади.
- Пряма сума зображень. Приклади.
- Унітарність зображень скінченних груп.
- Поняття звідного та незвідного зображення.
- Критерій розкладності зображення скінченної групи у пряму суму.

- Теорема про розклад зображення скінченної групи у пряму суму незвідних.
- Функції, визначені на групі. Теорема про розмірність простору центральних функцій, визначених на групі. Скалярне множення на групі. Приклади.
- Лема Шура та наслідки з неї.
- Характер зображення. Приклади. Найпростіші властивості характерів.
- Ортогональність характерів незвідних не ізоморфних зображень групи.
- Нормованість характерів незвідних зображень.
- Звідність регулярного зображення неединичної скінченної групи.
- Теорема про кратність.
- Подібність зображень, що мають однакові характери.
- Однозначність розкладу зображення у пряму суму незвідних.
- Теорема про центральну функцію.
- Теорема про кількість незвідних зображень скінченної групи.
- Основне співвідношення для степенів незвідних зображень скінченної групи.

**У результаті навчання студенти розвинути такі вміння:**

- застосовувати формулу орбіт та лему Бернсайда до розв'язування задач;
- досліджувати підстановочні зображення на точність, транзитивність, подібність;
- знаходити лінійні зображення скінченних груп;
- знаходити характери зображень скінченної групи;
- будувати таблиці характерів незвідних зображень груп невеликого порядку;
- досліджувати зображення на подібність, незвідність.

## **4. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **Змістовий модуль 1. Зображення груп підстановками**

#### **Тема 1. Теорема Келі**

Симетрична група. Подібні підстановки. Регулярне зображення групи правими зсувами. Теорема Келі.

#### **Тема 2. Дія групи на множині**

Дія групи на множині. Орбіти та стабілізатори, їх властивості. Формула орбіт. Лема Бернсайда.

#### **Тема 3. Зображення груп підстановками**

Поняття підстановочного зображення групи. Зображення групи підстановками правих класів суміжності за підгрупою. Ядро підстановочного зображення. Критерій точності зображення. Подібні підстановочні зображення. Транзитивні підстановочні зображення груп.

### **Змістовий модуль 2. Лінійні зображення скінченних груп**

#### **Тема 4. Лінійні зображення груп, основні поняття**

Лінійні зображення груп, основні поняття. Простір зображення, степінь зображення, точність. Приклади лінійних зображень. Регулярне зображення. Подібні зображення.

#### **Тема 5. Пряма сума зображень**

Поняття підзображення, приклади. Пряма сума зображень. Приклади.

#### **Тема 6. Звідні та незвідні зображення**

Унітарність зображень скінченних груп. Поняття звідного та незвідного зображення. Критерій розкладності зображення скінченної групи у пряму суму. Теорема про розклад зображення скінченної групи у пряму суму незвідних.

#### **Тема 7. Функції, визначені на групі**

Функції, визначені на групі. Теорема про розмірність простору центральних функцій, визначених на групі. Скалярне множення на групі. Приклади.

#### **Тема 8. Лема Шура та наслідки з неї**

Лема Шура та наслідки з неї.

### **Змістовий модуль 3. Характери лінійних зображень скінченних груп**

#### **Тема 9. Характер зображення, його найпростіші властивості**

Характер зображення. Приклади. Найпростіші властивості характерів.

#### **Тема 10. Характери незвідних зображень**

Характери незвідних зображень. Ортогональність характерів незвідних не

ізоморфних зображень групи. Нормованість характерів незвідних зображень. Звідність регулярного зображення неодиначної скінченної групи. Теорема про кратність. Подібність зображень, що мають однакові характери. Однозначність розкладу зображення у пряму суму незвідних.

### Тема 11. Кількість незвідних зображень скінченної групи

Теорема про центральну функцію. Теорема про кількість незвідних зображень скінченної групи. Основне співвідношення для степенів незвідних зображень скінченної групи.

## СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

| Назви змістових модулів і тем   | Кількість годин |              |                   |              |                   |
|---|-----------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|
|   | Усього          | у тому числі |                   |              |                   |
|   |                 | Лекції       | Практичні заняття | Консультації | Самостійна робота |
| <b>Змістовий модуль 1. Зображення груп підстановками</b>                |                 |              |                   |              |                   |
| Тема 1. Теорема Келі  | 15              | 2            | 2                 | 1            | 10                |
| Тема 2. Дія групи на множині  | 15              | 2            | 2                 | 1            | 10                |
| Тема 3. Зображення груп підстановками                                   | 53              | 6            | 6                 | 1            | 40                |
| <b>Разом за змістовим модулем 1</b>                                     | <b>83</b>       | <b>10</b>    | <b>10</b>         | <b>3</b>     | <b>60</b>         |
| <b>Змістовий модуль 2. Лінійні зображення скінченних груп</b>           |                 |              |                   |              |                   |
| Тема 4. Лінійні зображення груп, основні поняття                        | 13              | 2            | 2                 | 1            | 8                 |
| Тема 5. Пряма сума зображень  | 11              | 2            | 2                 | 1            | 6                 |
| Тема 6. Звідні та незвідні зображення                                   | 13              | 2            | 2                 | 1            | 8                 |
| Тема 7. Функції, визначені на групі                                     | 13              | 2            | 2                 | 1            | 8                 |
| Тема 8. Лема Шура та наслідки з неї                                     | 11              | 2            |                   | 1            | 8                 |
| <b>Разом за змістовим модулем 2</b>                                     | <b>61</b>       | <b>10</b>    | <b>8</b>          | <b>5</b>     | <b>38</b>         |
| <b>Змістовий модуль 3. Характери лінійних зображень скінченних груп</b> |                 |              |                   |              |                   |
| Тема 9. Характер зображення, його найпростіші властивості               | 25              | 2            | 2                 | 1            | 20                |
| Тема 10. Характери незвідних зображень                                  | 20              | 4            | 4                 | 2            | 10                |
| Тема 11. Кількість незвідних зображень скінченної групи                 | 21              | 4            | 6                 | 1            | 10                |
| <b>Разом за змістовим модулем 3</b>                                     | <b>66</b>       | <b>10</b>    | <b>12</b>         | <b>4</b>     | <b>40</b>         |
| <b>Всього годин</b>   | <b>210</b>      | <b>30</b>    | <b>30</b>         | <b>12</b>    | <b>138</b>        |

## ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

| № з/п | Тема  | Кількість<br>годин |
|-------|---|--------------------|
| 1     | <b>Групи підстановок</b><br>Подібні підстановки, циклічний тип. Подібні групи підстановок.  | 2                  |
| 2     | <b>Дія групи на множині</b><br>Дія групи на множині. Формула орбіт. Застосування леми Бернсайда.  | 2                  |
| 3     | <b>Групи симетрій геометричних фігур</b><br>Група рухів евклідового простору та її підгрупи. Група рухів правильного многокутника. Дієдральні групи. Група рухів тетраедра. Група рухів куба. Група симетрій тетраедра. Група симетрій куба. Групи симетрій додекаедра та ікосаедра. Двоїсті многогранники. | 4                  |
| 4     | <b>Зображення групи підстановками</b><br>Зображення групи підстановками правих класів суміжності групи за підгрупою. Дослідження зображень на точність та подібність.   | 2                  |
| 5     | <b>Приклади лінійних зображень</b><br>Приклади лінійних зображень скінченних груп. Дослідження зображень на подібність.   | 2                  |
| 6     | <b>Пряма сума зображень</b><br>Пряма сума зображень. Приклади.  | 2                  |
| 7     | <b>Регулярне зображення скінченної групи</b><br>Приклади регулярних зображень скінченних груп.  | 2                  |
| 8     | <b>Характери незвідних зображень</b><br>Характери незвідних зображень. Приклади.  | 2                  |
| 9     | <b>Зображення абелевих та циклічних груп</b><br>Знаходження і дослідження властивостей зображень абелевих та циклічних груп.  | 2                  |
| 10    | <b>Зображення дієдральних груп</b><br>Знаходження і дослідження властивостей зображень дієдральних груп.  | 4                  |
| 11    | <b>Характери групи поворотів тетраедра</b>  | 2                  |
| 12    | <b>Характери групи поворотів куба та групи симетрії тетраедра</b>   | 2                  |
| 13    | <b>Характери групи симетрії куба</b>  | 2                  |



## 5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Самостійна робота студентів включає в себе:

1. Опрацювання теоретичних основ лекційного матеріалу. 20 год.  
Перевірка здійснюється під час колоквиумів і оцінюється відповідною кількістю балів.
2. Підготовка до практичних занять, виконання домашніх завдань. 28 год.  
Перевірка здійснюється під час практичних занять. Якість, кількість і терміни виконання враховуються при виставленні поточної оцінки за відповідний змістовий модуль.
3. Систематизація вивченого матеріалу перед іспитом. 30 год.  
Перевірка здійснюється під час семестрового іспиту.
4. Вивчення тем, що не розглядаються в курсі лекцій. 60 год.  
Перевірка здійснюється під час колоквиумів і оцінюється відповідною кількістю балів.

### Перелік тем, що виносяться на самостійне опрацювання

| № з/п        | Тема  | Кількість годин |
|--------------|---|-----------------|
| 1            | Примітивні та імпримітивні зображення груп підстановками.   | 10              |
| 2            | Інверсна симетрична напівгрупа. Часткові підстановки. Теорема Вагнера-Престона.   | 10              |
| 3            | Зображення інверсних напівгруп частковими підстановками на множині правих $\omega$ -класів за замкненою інверсною піднапівгрупою. | 10              |
| 4            | Групові алгебри. Зображення алгебр.   | 10              |
| 5            | Тензорний добуток матриць.  | 2               |
| 6            | Тензорний добуток векторних просторів.  | 4               |
| 7            | Тензорний добуток лінійних операторів.  | 6               |
| 8            | Тензорний добуток зображень.  | 8               |
| <b>Разом</b> |   | <b>60</b>       |

## 7. РОЗПОДІЛ БАЛІВ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

| Поточний контроль (40 балів) |                    |                    | Модульний контроль (60 балів) |        | Загальна кількість балів |
|------------------------------|--------------------|--------------------|-------------------------------|--------|--------------------------|
| Змістовий модуль 1           | Змістовий модуль 2 | Змістовий модуль 3 | МКР 1                         | МКР 2  |                          |
| Т 1-3                        | Т 4-8              | Т 9-11             | Т 1-3                         | Т 4-11 | 100                      |
| 10                           | 15                 | 15                 | 20                            | 40     |                          |

Оцінювання навчальних досягнень студентів з курсу «Зображення алгебраїчних структур» здійснюється за 100 бальною шкалою.

Оцінювання студента включає в себе поточний контроль (оцінюється робота на парах, виконання самостійних завдань) та підсумковий модульний контроль (письмові модульні контрольні роботи, колоквиуми). Максимальна кількість балів, яку може заробити студент під час поточного оцінювання за семестр складає 40 балів. Підсумковий модульний контроль за семестр включає в себе оцінки за всі модульні контрольні роботи. Максимальна кількість балів, яку може заробити студент під час модульного контролю за семестр складає 60 балів.

Поточне оцінювання навчальних досягнень студентів за змістовий модуль здійснюється за 5-бальною шкалою.

При визначенні кількості балів за змістовий модуль викладач керується такими критеріями:

**5 балів** ставиться у тому випадку, якщо при вивченні теми показано осмислене розуміння теоретичних і практичних положень, матеріал викладається чітко, логічно, грамотно. Знання, вміння й навички студента повністю відповідають вимогам програми, зокрема, студент:

- усвідомлює нові для нього математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням;
- під керівництвом викладача знаходить джерела інформації та самостійно використовує їх; правильно розв'язує завдання з повним поясненням і обґрунтуванням.

**4 бали** ставиться, якщо при вивченні теми показано розуміння практичних завдань, наявні окремі несуттєві помилки у відповідях студента. Студент володіє визначеним програмою навчальним матеріалом; розв'язує завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; частково аргументує математичні міркування й розв'язування завдань.

**3 бали** ставиться тоді, коли студент ілюструє означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами; самостійно розв'язує завдання обов'язкового рівня із достатнім поясненням; записує математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки. При оцінюванні самостійної роботи 3 бали ставиться при суттєвих недоліках у теоретичній і практичній частинах роботи, за відсутності прикладів і достатньої аргументованості у відповідях автора, якщо в самостійній роботі нема чіткості викладу матеріалу.

**2 бали** ставиться у тому разі, коли студент має фрагментарні знання при незначному загальному обсязі, менше половини навчального матеріалу, за відсутності сформованих умінь та навичок; припускається суттєвих помилок, робота за багатьма параметрами не відповідає вимогам щодо її рівня виконання чи оформлення, а її автор має низький рівень теоретичної підготовки, більша частина завдань виконана неправильно, студент демонструє не цілісні знання, а фрагментарні.

**1 бал** ставиться у тому разі, коли студент, за допомогою викладача, розпізнає окремі об'єкти, явища і факти навчального матеріалу; під час відповіді припускається суттєвих помилок.

Якщо максимальна кількість балів за змістовий модуль відмінна від 5, то оцінка за такий модуль за п'ятибальною шкалою переводиться у оцінку за потрібною шкалою пропорційно. Наприклад, 3 бали за п'ятибальною шкалою відповідають 9 балам за 15-бальною шкалою.

Оцінювання навчальних досягнень студентів за **модульні роботи** здійснюється за шкалою, яка відображена у відповідній модульній роботі.

## **Критерії оцінювання студентів (підсумковий контроль)**

Підсумковий контроль здійснюється у формі екзамену.

**60 балів** (Максимальна кількість) ставиться у тому випадку, коли студент має системні, дієві знання, виявляє неординарні творчі здібності у навчальній діяльності, вирішує складні проблемні завдання, вміє ставити і розв'язувати проблеми, самостійно здобувати і використовувати інформацію, самостійно виконує науково-дослідницьку роботу; логічно та творчо викладає матеріал в усній та письмовій формі; розвиває свої обдаровання і нахили, самостійно виконує 100 % від загальної кількості запропонованих завдань.

Кількість балів зменшується відповідно до проценту виконання запропонованих на екзамені практичних завдань та теоретичних питань.

**41—59 балів** ставиться, коли студент виявляє знання і розуміння основних положень навчального матеріалу, може робити певні висновки; відповідь його правильна, але недостатньо осмислена; самостійно відтворює більшу частину навчального матеріалу; відповідає за планом, висловлює власну думку щодо теми, вміє застосовувати знання при розв'язуванні вправ; користується додатковими джерелами; виконує 65 % від загальної кількості завдань.

**21-40 балів** ставиться, коли студент знає більше половини навчального матеріалу, здатний відтворити його відповідно до тексту підручника або пояснень викладача, повторити за зразком певну операцію, дію; описує явища, процеси без пояснень причин, із допомогою викладача здатен відтворити їх послідовність, орієнтується у поняттях; має фрагментарні навички у роботі з підручником; самостійне опрацювання навчального матеріалу викликає труднощі; здатен давати відповіді на прості, стандартні запитання, виявляє інтерес до навчального матеріалу, виконує 45 % від загальної кількості завдань.

**11--20 балів** ставиться тоді, коли студент відтворює менш як половину навчального матеріалу; з допомогою викладача виконує елементарні завдання; здатен усно відтворити окремі частини теми; має фрагментарні уявлення про роботу з літературними джерелами; виконує 30 % від загальної кількості завдань.

**1-10 балів** ставиться студенту, коли він може розрізнити об'єкт вивчення і відтворити деякі його елементи; мало усвідомлює мету навчально-пізнавальної діяльності; виконує не більш як 20 % від загальної кількості завдань.

### Шкала оцінювання (національна та ECTS)

| Сума балів<br>за всі види навчальної<br>діяльності | Оцінка       |  |
|--|--------------|--|
|  | для екзамену | для заліку   |
| 90 – 100   | Відмінно     | Зараховано   |
| 82 – 89  | Дуже добре   |  |
| 75 - 81  | Добре        |  |
| 67 -74   | Задовільно   |  |
| 60 - 66  | Достатньо    |  |
| 1 – 59   | Незадовільно | Незараховано<br>(з можливістю повторного<br>складання) |

## 8. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Методичне забезпечення курсу

1. Волошина Т.В. Основні алгебраїчні структури: курс лекцій / Волошина Т.В. — Луцьк : Вежа-Друк, 2015. — 60 с.

### Перелік джерел

1. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп / В.А. Белоногов. – Свердловск, 1990. – 379 с.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. – СПб.: Лань, 2004. – 624 с.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Головина Л.И. – М. : Наука, 1985. — 407 с.
4. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры / Ю.А. Дрозд, В.В. Кириченко. – К.: Вища школа, 1980. – 192 с.
5. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Е.Г. Позняк. — М. : Наука, 1984. — 296 с.
6. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру / Л.А. Калужнин. — М. : Наука, 1973. — 448 с.

7. Кириллов А.А. Основы теории представлений / А.А. Кириллов. – М.: Наука, 1972. – 224 с.
8. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кэртис, И. Райнер. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
9. Ленг С. Алгебра / С. Ленг. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
10. Наймарк М.А. Теория представлений групп / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1976. – 559 с.
11. Пилипів В.М. Теорія представлень груп та її застосування: навч. посібник / В.М. Пилипів. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ Прикарпатського нац. ун-ту, 2008. – 156 с.
12. Серр Ж.-П. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Серр Ж.-П. – М.: Наука, 1970. – 132 с.
13. Холл М. Теория групп / М. Холл. – М.: ИЛ, 1962. – 468 с.
14. Шапочка І.В. Зображення скінченних груп / І.В.Шапочка. – Ужгород, 2013. – 58 с.
15. Шейнман О.К. Основы теории представлений / О.К.Шейнман. – М.: МЦНМО, 2004. – 64 с.

## 9. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Регулярне зображення групи правими зсувами. Теорема Келі.
2. Дія групи на множині.
3. Орбіти та стабілізатори, їх властивості. Формула орбіт.
4. Лема Бернсайда.
5. Поняття підстановочного зображення групи.
6. Зображення групи підстановками правих класів суміжності за підгрупою.
7. Ядро підстановочного зображення.
8. Критерій точності зображення групи підстановками правих класів суміжності за підгрупою.
9. Подібні підстановочні зображення. Критерій подібності.
10. Транзитивні підстановочні зображення груп.
11. Лінійні зображення груп, основні поняття: простір зображення, степінь зображення, точність, подібність зображень.
12. Приклади лінійних зображень. Регулярне зображення.
13. Поняття підзображення, приклади.
14. Пряма сума зображень. Приклади.
15. Унітарність зображень скінченних груп.
16. Поняття звідного та незвідного зображення.
17. Критерій розкладності зображення скінченної групи у пряму суму.
18. Теорема про розклад зображення скінченної групи у пряму суму незвідних.
19. Функції, визначені на групі. Теорема про розмірність простору центральних функцій, визначених на групі.
20. Скалярне множення на групі. Приклади.
21. Лема Шура та наслідки з неї.
22. Характер зображення. Приклади.
23. Найпростіші властивості характерів.
24. Ортогональність характерів незвідних не ізоморфних зображень групи.
25. Нормованість характерів незвідних зображень.
26. Звідність регулярного зображення неодиначної скінченної групи.
27. Теорема про кратність.
28. Подібність зображень, що мають однакові характери.
29. Однозначність розкладу зображення у пряму суму незвідних.
30. Теорема про центральну функцію.
31. Теорема про кількість незвідних зображень скінченної групи.
32. Основне співвідношення для степенів незвідних зображень скінченної групи.

Екзамен проходять у письмовій формі. У кожному екзаменаційному білеті міститься теоретичне питання з переліку і задача.