МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з науково-педагогічної і навчальної роботи та рекрутації,
проф. Гаврилюк С. В.

Протокол № 2 від 17. 10. 2018 р.

ПРОГРАМА
нормативної навчальної дисципліни

ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

підготовки магістра

спеціальності 111 Математика

освітньої програми (спеціалізації) Математика

Луцьк – 2018

Програма навчальної дисципліни «ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ» для студентів галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика, освітньої програми Математика.

Розробник: Харкевич Ю.І., професор кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики, кандидат фіз.-мат. наук, професор

Рецензент: Бушев Д. М., доцент кафедри алгебри і математичного аналізу, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Програма навчальної дисципліни затверджена на засіданні кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
протокол № 2 від 05. 09. 2018 р.

Завідувач кафедри: ________________ (Чичурін О.В.)

Програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною комісією факультету інформаційних систем, фізики та математики
протокол № 1від 06. 09. 2018 р.

Голова науково-методичної
комісії факультету: ________________ (Полетило С.А.)

Програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки

1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<table>
<tr><th>Найменування показників</th><th>Галузь знань, спеціальність, освітня програма, освітній ступінь</th><th>Характеристика навчальної дисципліни</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Денна форма навчання</td><td rowspan="8">11 Математика та статистика,
111 Математика,
Математика,
магістр</td><td>Нормативна</td></tr>
<tr><td>Рік навчання 5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Кількість годин/кредитів 120 / 4</td><td>Семестр 9</td></tr>
<tr><td>Лекції 28 год.</td></tr>
<tr><td>Практичні 26 год.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ІНДЗ: є</td><td>Самостійна робота 58 год.</td></tr>
<tr><td>Консультації 8 год.</td></tr>
<tr><td>Форма контролю: екзамен</td></tr>
</table>

2. АНОТАЦІЯ КУРСУ

Дисципліна «Додаткові розділи функціонального аналізу» належить до переліку навчальних дисциплін, яка забезпечує професійний розвиток магістра та спрямована на вивчення розділів математики, які необхідні для більш повного, глибокого та детального засвоєння спецкурсів з теорії функцій. Метою викладання навчальної дисципліни «Додаткові розділи функціонального аналізу» є сприяння більш повному і глибокому засвоєнню перерахованих вище розділів математики. Основними завданнями вивчення дисципліни «Додаткові розділи функціонального аналізу» є: навчити студентів краще орієнтуватись при написанні дипломних і магістерських робіт та можливості самостійно здобувати знання з теорії функцій.

3. КОМПЕТЕНЦІЇ

До кінця навчання студенти будуть компетентними у таких питаннях:

- визначення метричного, лінійного, лінійного нормованого та евклідового просторів,
- визначення та властивості просторів послідовностей l_p і обмежених послідовностей m, просторів неперервних обмежених і інтегрованих функцій L_p,
- визначення найкращого наближення елемента і множини,

– визначення границі елементів лінійного нормованого простору,
– визначення неперервності і рівномірної неперервності функціонала норми,
– визначення опуклої множини, опуклого функціонала,
– визначення знаковизначених і незнаковизначеної матриць,
– визначення похідної першого і другого порядків для функцій від n-змінних,
– визначення середніх степеневих чисел порядку P.

До кінця навчання студенти набудуть таких умінь:

– доводити нерівності Шварца, Єнсена, Юнга, між середніми степеневими чисел, Гельдера, Мінковського та інші,
– формулювати і доводити критерій опуклості множини,
– формулювати і доводити критерії опуклості функціоналів і функцій від однієї змінної,
– формулювати і доводити критерій Сільвестра,
– формулювати і доводити достатні умови опуклості функцій від однієї і багатьох змінних,
– формулювати і доводити властивості середніх степеневих чисел і норм послідовностей в просторах, як функцій змінної,
– будувати графіки середніх степеневих і норм послідовностей,
– встановлювати опуклість поверхонь другого порядку.

4. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	**Усього**	**Лек.**	**Практ.**	**Сам. роб.**	**Консл.**
Змістовий модуль І. Функціональні простори. Опуклі функціонали, їх використання в диференціальній геометрії і для доведення класичних нерівностей.					
Тема 1. Метричні простори. Приклади.	6	2	2	3	1
Тема 2. Лінійні і лінійні нормовані простори. Приклади.	7	2	2	3	0
Тема 3. Евклідові простори. Властивості скалярного добутку.	9	2	2	3	1

Нерівність Шварца.					
Тема 4. Опуклі множини. Критерій опуклості множини	5	2	1	3	0
Тема 5. Опуклі функціонали. Критерії опуклості функціонала.	7	2	1	3	1
Тема 6. Достатні умови опуклості функції від однієї змінної. Критерії опуклості функції від однієї змінної.	7	2	2	3	0
Тема 7. Критерій знаковизначеності матриці.	5	1	1	3	0
Тема 8. Достатні умови опуклості функції від багатьох змінних.	7	2	1	3	0
Тема 9. Встановлення опуклості поверхонь другого порядку.	8	0	2	4	1
Разом за змістовним модулем I	**61**	**15**	**14**	**28**	**4**
Змістовий модуль II. Властивості норма послідовностей в просторах послідовностей l_p, як функцій змінної p.					
Тема 10. Нерівність Юнга. Нескінченна диференційовність добутку функцій і складної функції.	6	2	2	3	0
Тема 11. Властивості середніх степеневих.	6	1	1	3	0
Тема 12. Різні способи доведення нерівності Гельдера.	6	1	1	3	0
Тема 13. Різні способи доведення нерівності Гельдера для просторів векторів і послідовностей.	6	1	1	3	0
Тема 14. Нерівність Мілковського для просторів векторів і послідовностей. Приклади.	6	1	1	3	1
Тема 15. Достатні умови строгої монотонності і строгої опуклості функцій на проміжку.	5	1	2	3	0
Тема 16. Властивості норм векторів в	8	2	1	4	1

просторах $< R^n, \rho_p >$, як функцій змінної p.					
Тема 17. Диференційовність функціонального ряду.	8	2	1	4	1
Тема 18. Властивості норм послідовностей в просторах l_p, як функцій змінної p.	8	2	2	4	1
Разом за змістовним модулем ІІ	**59**	**13**	**12**	**30**	**4**
Всього годин	**120**	**28**	**26**	**58**	**8**

5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

№ з/п	Тема	Кількість годин
1	Властивості віддалі. Узагальнена нерівність трикутника.	2
2	Приклади метричних просторів. Довести метричність простору $< X, \overline{\rho} >$, де $\overline{\rho}(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ і $< X, \rho >$ метричний простір.	2
3	Лінійні нормовані простори. Означення вимірної на множині функції. Чому простір $M_{[a,b]}$ не міститься в просторі вимірних і інтегровних на сегменті $[a,b]$ функцій $L_{p[a,b]}$? Навести приклад обмеженої на сегменті функції, яка не є вимірною на цьому сегменті.	3
4	Довести: $\left\| \|x\| - \|y\| \right\| \le \|x-y\|$. Навести приклади неперервних функцій, які не рівномірно неперервна на проміжку і на множині всіх дійсних чисел.	2
5	Означення і приклади Евклідових просторів. Властивості скалярного добутку. Перевірити виконання аксіом скалярного добутку в просторі $L_{2[a,b]}$ $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$. Довести $< \alpha x, \alpha x >=\|\alpha\|^2 < x,x >$ і $< \theta, x >=< x, \theta >=0$. Для яких α ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збігається? Інтегральна ознаку збіжності числового ряду.	3

6	Опуклі множини. Навести приклади опуклих і не опуклих множин. Теорема про перетин опуклих множин.	2
7	Критерій опуклості множини. Навести приклади опуклих оболонок в математичному аналізі, в теорії імовірностей. Довести, що якщо (а) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subset [0,1] \wedge$ (б) $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1) \wedge (\overline{x}_3 \notin \{(\overline{x}_2 - \overline{x}_1)t : t \in R\}) \Rightarrow (\{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i : a) \wedge б)\} = \Delta \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3)$	3
8	Опуклі функціонали. Чи є функціонал норми строгоопуклим донизу на всьому лінійному просторі? Довести критерій опуклості функціонала.	2
9	Достатні умови опуклості функції від однієї змінної. Довести достатню умову строгої опуклості функції від однієї змінної в точці.	3
10	Критерії і достатні умови опуклості функції від однієї змінної. Довести критерій опуклості функції на проміжку. Довести критерій опуклості диференційованої функції на проміжку.	3
11	Критерій знаковизначеності матриці. Навести приклади строго додатньо (від’ємно), не строго додатньо (від’ємно) визначених матриць.	3
12	Достатні умови опуклості функції від багатьох змінних. Теорема про рівність мішаних похідних. Необхідні і достатні умови локального екстремума функції від *n* змінних. Як опукла функція від n змінних в точці локального екстремума?	3
13	Встановлення опуклості поверхонь другого порядку.	3
14	Нерівність Юнга. Довести наслідок до нерівності Юнга, не використовуючи теорему.	3
15	Нескінчена диференційовність добутку функцій і складної функції. Знайти похідні порядку *n* функцій: $y = b^x$, $y = x^a$, $y = \ln x$.	3
16	Властивості середніх степеневих. Накреслити графік функції $S_n(p)$.	3
17	Різні способи доведення нерівності Гельдера для просторів n-вимірних векторів і послідовностей.	3
18	Приклади ЛНП елементами яких є вектори і послідовності. Довести, що при $0 < p < 1$простори $< R^n, \rho_p > i$ $< l_p, \rho_p >$не є нормованими. Навести приклади векторів і послідовностей, які не належать одному і тому ж променю, але норма їх суми дорівнює сумі норм в просторах $< R^n, \rho_1 >$,$<R^n, \rho_m>$ векторів і $<l_1, \rho_1>$, $<m, \rho_m>$ послідовностей.	3
19	Властивості норм векторів в просторах$< R^n, \rho_p >$, як функції	3

20	змінної p. Довести наслідок про властивості функції $f_n(p) = \left\| \overline{x}(x_1,...,x_n) \right\|_p$ на інтервалі $(0,\infty)$. Накреслити графік функції $f_n(p)$. Довести критерій сталості функції $f_n(p)$.	
20	Диференційовність функціонального ряду. Теореми про неперервність і диференційовність функціонального ряду. Знайти похідну к-го порядку від сум степеневих рядів для функцій $\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x, \ln(1+x)$ і від цих функцій. Встановити множину збіжності цих рядів.	3
21	Властивості норм послідовностей в просторах $< l_p, \rho_p >$, як функції змінної р. Дослідити на збіжність ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$, $\alpha > 1$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \ln n}{n \ln^2 n}$. Навести приклад послідовності $x(x_1,...,x_n,...)$, яка належить простору l_{p_0} і при довільному $p_0 > p > 0$ не належить простору l_p. Навести приклад послідовності $x(x_1,...,x_n,...)$, яка належить простору l_{p_0}, тобто $f^\infty(p_0) = \| x(x_1,...,x_n,...) \|_{l_{p_0}}$, але похідна функції $f^\infty(p)$ в точці p_0 не існує.	3
Разом		**58**

6. ВИДИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ НАУКОВО-ДОСЛІДНИХ ЗАВДАНЬ (ІНДЗ)

Кожний студент вибирає одну з нижче запропонованих тем, підбирає, крім запропонованої, іншу літературу та виступає з доповіддю по опрацьованих питаннях в поза аудиторний час. Оцінка роботи здійснюється відповідною кількістю балів.

Індивідуальне завдання передбачає опрацювання теоретичного матеріалу та виконання завдань на теми:

1. Еквівалентні означення абсолютно неперервної функції. Теореми про рівномірну неперервність абсолютно неперервної функції, арифметичні операції над абсолютно неперервними функціями, абсолютна неперервність складної функції.
2. Диференціювання абсолютно неперервних функцій. Теорема про обмеженість повної варіації абсолютно неперервної функції. Наслідок про диференційованість абсолютно неперервної функції. Теорема про сталість абсолютно неперервної функції. Наслідок про рівність абсолютно неперервних функцій.
3. Критерій функції з обмеженою варіацією, приклад неперервної функції з необмеженою варіацією. Теорема про похідну від монотонної функції.
4. Неозначений інтеграл Лебега. Теорема про абсолютну неперервність неозначеного інтеграла Лебега і похідну від неозначеного інтеграла Лебега. Критерій абсолютно неперервної функції. Критерій належності функцій класу КН1[a,b].

5. Теорема про похідну від інтеграла по змінній верхній межі інтегрування. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.

6. Теорема про повну варіацію абсолютно неперервної функції. Приклад неперервної функції, похідна від якої майже скрізь дорівнює 0.

7. Формули Ньютона-Лейбніца, заміни змінних і інтегрування частинами для інтеграла Рімана. Підсумкова співбесіда

7. РОЗПОДІЛ БАЛІВ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1		**ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 2**		ІНДЗ	СУМА
Тема 1-9	Підсумкова співбесіда	Тема 10-18	Підсумкова співбесіда		
20	30	10	30	10	100

Шкала оцінювання

Оцінка в балах за всі види навчальної діяльності	**Оцінка**
	для екзамену
90 – 100	Відмінно (A)
82 – 89	Дуже добре (B)
75 - 81	Добре (C)
67 -74	Задовільно (D)
60 - 66	Достатньо (E)
1 – 59	Незадовільно (FX)

8. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Бушев Д.М. Електронний варіант лекцій та контрольних питань.

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Изд. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 496 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций / Наум Ильич Ахиезер. - М. «Наука», 1965. – 408 с.
3. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной / Исидор Павлович Натансон. – М. «Наука», 1974. - 480 с.
4. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Гелбаум Б., Оласстед Дж. – М.: «Мир», 1967. – 251 с.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / Владислав Кириллович Дзядык. – М.: «Наука», 1977. – 511 с.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи в теории приближений / Николай Павлович Корнейчук. - М.: «Наука», 1975. – 320 с.
7. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений / Николай Павлович Корнейчук. – М.: «Наука», 1987. – 424 с.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Нина Карловна Барии. – Гос. изд. физико-математической л-ры, 1961. – 936 с.
9. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Анилов. – М.: «Наука», 1984. – 752 с.
10. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении / Роберт Эдвардс. – Том 1, пер. с англ. – Москва.: Мир, 1985. 264 с.
11. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел / С.Т. Завало, В.М. Костарчук, Б. І. Хацет. - М.: «Наука», 1979. – 128 с.
12. Дороговцев А. А. Математичний аналіз / Андрей Анатольевич Дороговцев. – М.: «Просвещение», 1966. – 531 с.
13. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ / Лев Дмитриевич Кудрявцев. – М.: «Высшая школа», 1973. – 614 с.
14. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / Сергей Михайлович Никольский. – М.: «Просвещение», 1969. – 480 с.
15. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / Александр Филиппович Тимман. – Гос. изд. физико-математической л-ры, Москва, 1960. – 624 с.
16. Бушев Д.М. Електронний варіант лекцій і контрольних питань.