

ПРОГРАМА
атестаційного (бакалаврського) іспиту
з математики для здобувачів ОПП «Математика»
спеціальності 111 Математика

Частина I. Студент повинен активно володіти поняттями (знати означення понять, наводити приклади, формулювати теореми та наслідки з них, знати формули, будувати графіки, діаграми, рисунки і т.п.):

1. Математичний аналіз

- Поняття границі послідовності: числової послідовності, послідовності функцій (поточної та рівномірної), послідовності елементів метричного простору.
- Неперервні та рівномірно неперервні функції. Точки розриву.
- Похідна та диференціал функцій однієї та кількох змінних.
- Формула Тейлора. Основні розклади.
- Інтеграл Рімана, умови його існування. Формули Ньютона-Лейбніца.
- Числові та функціональні ряди. Ознаки збіжності. Абсолютна збіжність. Рівномірна збіжність.
- Ряди Фур'є. Умови розкладу функцій в ряд Фур'є.

2. Функціональний аналіз

- Поняття метричного простору: повнота, сепарабельність.
- Лінійні нормовані простори, їх властивості.

3. Теорія міри та інтеграла

- Різні види збіжності послідовностей функцій та зв'язок між ними.
- Поняття міри та інтеграл Лебега.

4. Комплексний аналіз

- Елементарні функції комплексної змінної. Конформні відображення.
- Розклад аналітичних функцій у степеневий ряд. Ряд Лорана.
- Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

5. Лінійна алгебра

- Системи лінійних рівнянь, методи їх розв'язування. Критерій сумісності.
- Многочлени від однієї змінної. Корені многочлена. Теорема Безу та теорема Вієта. Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами.
- Квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми.
- Лінійні оператори у векторному просторі. Власні значення та власні вектори лінійного оператора.

6. Алгебра і теорія чисел

- Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне цілих чисел. Канонічний розклад натурального числа на прості множники. Обчислення значень числових функцій $\tau(n)$, $\sigma(n)$ та $\varphi(n)$.
- Конгруенції в кільці цілих чисел. Теорема Ейлера і Ферма.
- Лінійні конгруенції з одним невідомим. Методи розв'язування лінійних конгруенцій.
- Групи, підгрупи. Ізоморфність груп. Теорема Лагранжа про порядок підгрупи.
- Кільця і поля. Властивості та приклади кілець та полів.

7. Аналітична геометрія

- Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів: означення, властивості, застосування.
- Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої в афінній та прямокутній декартовій системах координат. Взаємне розміщення двох прямих на площині.
- Криві другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола): означення, канонічні рівняння, властивості.
- Пряма у просторі: різні види рівнянь, взаємне розміщення двох прямих у просторі.
- Площина у просторі: різні види рівнянь площини; розміщення площини відносно системи координат; взаємне розміщення двох площин.
- Взаємне розміщення прямої і площини у просторі. Кут між прямою і площиною.
- Поверхні другого порядку (еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди), їх означення, канонічні рівняння та властивості.

8. Диференціальна геометрія і топологія

- Криві у просторі. Супровідний тригранник. Формули Френе. Кривина і скрут – основні інваріанти кривої.
- Поверхні, різні способи аналітичного задання. Перша квадратична форма поверхні. Довжина дуги кривої на поверхні, кут між лініями, площа області на поверхні.
- Друга квадратична форма поверхні. Інваріанти лінії на поверхні: асимптотичні лінії, лінії кривини, спряжені сітки, геодезичні лінії.
- Друга квадратична форма поверхні. Основні інваріанти поверхні. Нормальна кривина. Теорема Менсьє. Індикатриса Дюпена, головні кривини.
- Топологічні простори: означення, приклади. Замкнені множини, їх властивості. Зв'язність.
- Неперервні та топологічні відображення топологічних просторів. Приклади.
- Топологічні многовиди. Топологічна класифікація двовимірних многовидів.

9. Диференціальні рівняння

- Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь.
- Основні типи інтегровних рівнянь.
- Лінійні однорідні та неоднорідні рівняння n -ого порядку. Метод варіації сталих розв'язування таких рівнянь.
- Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь першого порядку та їх інтегрування.

10. Теорія ймовірності та математична статистика

- Аксиоми теорії ймовірності. Ймовірнісні моделі. Теореми додавання і множення.
- Випадкові величини, функція розподілу. Основні розподіли.
- Числові характеристики випадкових величин.
- Статистичний розподіл. Оцінки параметрів розподілу.
- Перевірка статистичних гіпотез.
- Ланцюги Маркова.

11. Обчислювальні методи

- Інтерполяційний многочлен Лагранжа. Залишковий член формули інтерполяції.
- Квадратурні формули трапецій та Симпсона, їх залишкові члени.
- Наближені методи розв'язування нелінійних рівнянь з однією невідомою.

12. Дискретна математика

- Поняття множини і підмножини. Способи задання множин. Операції над множинами та їх властивості. Принцип двоїстості.
- Відповідності між множинами. Способи задання, операції над відповідностями. Відношення еквівалентності.
- Поняття графа. Задання графів. Зв'язність, компоненти зв'язності. Пошук оптимальних маршрутів у графах.

13. Рівняння у частинних похідних

- Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку від двох незалежних змінних.
- Вільні коливання нескінченної струни.
- Рівняння теплопровідності.

Частина II. Студент повинен вільно формулювати і доводити твердження, виводити формули, обґрунтовувати виклад теоретичних положень:

1. Математичний аналіз

- Властивості збіжних послідовностей.
- Властивості функцій, неперервних на сегменті.
- Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.
- Ознака Лейбніца збіжності знакопозначеного ряду.
- Властивості суми функціонального ряду: неперервність, інтегровність, диференційовність.
- Теорема Банаха про стискуючі відображення.
- Необхідні та достатні умови диференційовності функцій кількох змінних.
- Формула заміни змінних у кратному інтегралі.
- Достатні умови збіжності ряду Фур'є в точці.

2. Функціональний аналіз

- Повні метричні простори. Теорема про вкладені кулі.
- Характеристична властивість евклідових просторів.
- Теорема Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала.

3. Теорія міри та інтеграла

- Теорема про неперервність міри.
- Теорема про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

4. Комплексний аналіз

- Умова диференційовності функції комплексної змінної.
- Інтегральна теорема Коші.
- Інтегральна формула Коші.

5. Лінійна алгебра

- Теорема Кронекера-Капеллі
- Теорема Безу та теорема Вієта.
- Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичних форм.
- Властивості власних векторів.

6. Алгебра і теорія чисел

- Теореми Ейлера і Ферма.
- Теорема про розв'язки лінійних конгруенцій.
- Теорема Лагранжа про порядок підгрупи.
- Формули для обчислення значень числових функцій $\tau(n)$, $\sigma(n)$.
- Основні властивості кілець та полів.

7. Аналітична геометрія

- Властивості скалярного добутку векторів.
- Властивості векторного добутку векторів.
- Теорема про геометричний зміст мішаного добутку векторів.
- Теорема про розклад вектора за базисними векторами.
- Взаємне розміщення двох прямих на площині.

- Рівняння та властивості кривих другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола).
- Взаємне розміщення двох прямих у просторі.
- Взаємне розміщення двох площин у просторі.

8. Диференціальна геометрія і топологія

- Формули Френе. Кривина та скрут кривої.
- Перша квадратична форма поверхні. Довжина дуги кривої, кут між лініями на поверхні, площа області.
- Друга квадратична форма поверхні. Повна і середня кривини поверхні.
- Топологічні простори. Зв'язність.
- Топологічні многовиди. Класифікація двовимірних топологічних многовидів.

9. Диференціальні рівняння

- Теорема Пікара для диференціального рівняння першого порядку.
- Теорема про існування фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -ого порядку.
- Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -ого порядку.

10. Теорія ймовірності та математична статистика

- Формула повної ймовірності та формула Байєса.
- Формула Бернуллі. Граничні теореми в біноміальній схемі.
- Властивості математичного сподівання і дисперсії випадкової величини.
- Класичні форми закону великих чисел.
- Властивості точкових оцінок параметрів розподілу.
- Критерій згоди Пірсона про вид розподілу.
- Ергодична теорема Маркова.

11. Дискретна математика

- Теорема Кантора про потужність множини всіх підмножин даної множини.
- Біноміальні коефіцієнти та їх властивості.

12. Рівняння в частинних похідних

- Рівняння коливання скінченної струни. Метод відокремлення змінних.
- Інтегрування першої мішаної задачі для одновимірного рівняння теплопровідності.

Структура екзаменаційного білета

У екзаменаційному білеті міститься два теоретичних питання: одне з першої частини, друге – з другої частини. Питання з другої частини програми вимагає обґрунтованого викладу, доведення основних теорем, властивостей, формул і т. ін. До кожного білету пропонується задача. Обидва питання і задача з одного білету стосуються різних розділів математики.

Політика щодо академічної доброчесності під час атестаційного іспиту

Під час складання бакалаврського іспиту заборонено використовувати літературні джерела, в тому числі розміщені у мережі Інтернет; допоміжні матеріали, довідники, конспекти, в тому числі в електронній формі; користуватися мобільним телефоном, планшетом, ноутбуком та іншими засобами зв'язку та гаджетами; використовувати для обчислень програмне забезпечення. При виконанні завдань слід дотримуватися принципів академічної доброчесності, розв'язувати задачі самостійно, без допомоги сторонніх осіб.

Програма затверджена вченою радою факультету інформаційних технологій і математики. Протокол № 2 від 28.09.2023 року.